2 Многочлены

2.1 Делимость, НОД, корни, кольца вычетов

Задача 1.1 $a(x)$ и $b(x)$ – многочлены над кольцом R. Разделить $a(x)$ на $b(x)$ с остатком:

а) R – поле из двух элементов, $a(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x + 1$ и $b(x) = x^3 + x + 1$;

б) R – поле из пяти элементов, $a(x) = 2x^5 + 4x^4 + 2x^2 + 3x + 1$ и $b(x) = 3x^3 + 2x + 1$;

в) R – кольцо $\mathbb{Z}/6$, $a(x) = 2x^5 + 4x^4 + 5x^2 + 3x + 2$ и $b(x) = 5x^3 + 2x + 1$;

Задача 1.2 Найти НОД многочленов $a(x)$ и $b(x)$ и выразить его через исходные:

а) $a(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ и $b(x) = x^4 + 1$ над полем из двух элементов;

б) $a(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2$ и $b(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$ над полем действительных чисел ;

Задача 1.3 Доказать, что многочлен

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней.

Задача 1.4 Найти все рациональные корни многочлена $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$.

Задача 1.5 Разложить на неприводимые множители многочлен над полем из двух элементов $x^5 + x^4 + 1$.

Задача 1.6 Доказать, что если рациональное число $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена $f(x)$, то $p - mq | f(m)$ для любого целого m.

Задача 1.7 Решить сравнение для многочленов над полем из двух элементов:

$$x^3 + x^2 + x + 1 \equiv x^2 + 1 (\mathrm{mod}\ x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$$

Задача 1.8 Существует ли обратный элемент к $[x^3 + x^2 + 2]_f$ в кольце $P[x]/f(x)$, где $P = \mathbb{Z}/5$, а $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$. Если да – найти его, если нет – объяснить, почему.

Задача 1.9 Построить поля из 8ми и 9ти элементов.