

1.3 Сравнения, остатки, китайская теорема

Задача 3.1 а) Представляя целое число в десятичной системе счисления вывести признаки делимости на 3, 9 и 11.

б) Представляя целое число в системе с основанием 100 вывести признак делимости на 101.

в) Представляя целое число в системе с основанием 1000 вывести признак делимости на 7, 13, 37.

Задача 3.2 Найти остаток от деления 7531^{1357} на 12.

Задача 3.3 Решить сравнение $1215x \equiv 560 \pmod{2755}$

Задача 3.4 Решить систему сравнений

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{7} \\ x \equiv 9 \pmod{11} \\ x \equiv 3 \pmod{13} \end{cases}$$

Задача 3.5 Найти все пары (x, y) , удовлетворяющие уравнению $47x - 111y = 89$.

Задача 3.6 Решить систему сравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y - 29 \equiv 0 \pmod{143} \\ 2x - 9y + 84 \equiv 0 \pmod{143} \end{cases}$$

1.4 Кольца вычетов

Задача 4.1 Элемент кольца R называется *нильпотентным*, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $a^n = 0$. Описать все нильпотентные элементы кольца $\mathbb{Z}/m$. При каком условии в этом кольце все необратимые элементы являются нильпотентными?

Задача 4.2 Найти условия, при которых все элементы группы $(\mathbb{Z}/m, +)$ являются кратными одного ее элемента $[a]_m$. Сколько таких элементов в этой группе.

Задача 4.3 Найти наименьшее натуральное число k , удовлетворяющее равенству $k[a]_m = [0]_m$, а также число классов $[a]_m$, удовлетворяющих указанному равенству при данном значении k .

Задача 4.4 Выписать группы обратимых элементов колец $\mathbb{Z}/24$ и $\mathbb{Z}/16$. Являются ли эти группы циклическими? Изоморфны ли они?

Задача 4.5 Выписать все подкольца кольца $\mathbb{Z}/18$. Какие из них изоморфны кольцам вычетов по другим модулям?

Задача 4.6 В кольце $\mathbb{Z}/975$ найти элементы, обратные к элементам $[13]_{975}$, $[223]_{975}$