1 Задачи по кольцу целых чисел

1.1 Делимость, деление с остатком, НОК и НОД

Задача 1.1 Доказать, что при любом целом $k > 1$ и любом $n \in \mathbb{N}$ число $a \in \overline{0, k^n - 1}$ можно однозначно представить в виде

$$a = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \ldots + a_{n-1} k^{n-1}, \text{ где } a_i \in \overline{0, k-1}.$$

Задача 1.2 Обозначим $r_m(c)$ остаток от деления целого числа c на m. Доказать, что если $r_m(a) = r_m(b)$, то $(a, m) = (b, m)$.

Задача 1.3 Доказать равенство $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) = ((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n))$.

Задача 1.4[*] Если $(a_1, \ldots, a_n, b) = d$, то существуют такие $c_2, \ldots, c_n$, что $(a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_n a_n, b) = d$.

Задача 1.5 Пусть $n \leq 2$ и $a_1, \ldots, a_n$ – попарно взаимно простые числа, а $b_i = \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{a_i}$. Доказать, что $(b_1, \ldots, b_n) = 1$.

Задача 1.6 В скольких вариантах можно восстановить пару натуральных чисел a, b по их НОД и НОК?

Задача 1.7 Пусть $n \leq 2$, $a_1, \ldots, a_n$ неравные нулю целые числа, $d \in \mathbb{N}$. Следующие утверждения эквивалентны:

а) $(a_1, \ldots, a_n) = d$;

б) для чисел $a_1, \ldots, a_n$ число d является общим делителем вида $U_1 a_1 + \ldots + U_n a_n$, где $U_1, \ldots, U_n \in \mathbb{Z}$.

в) d – наименьшее натуральное число вида $U_1 a_1 + \ldots + U_n a_n$.

г) d – максимальный общий делитель чисел $a_1, \ldots, a_n$.

Задача 1.8 Для любых чисел $a \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство:

$$(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1.$$

Задача 1.9[*] Пусть $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$, $(a_1, \ldots, a_n) = d$, $M = \{U_1 a_1 + \ldots + U_n a_n | U_1, \ldots, U_n \in \mathbb{N}_0\}$. Доказать, что существует такое $q \in \mathbb{N}$, что все натуральные числа, кратные d и большие или равные qd, принадлежат M.

Задача 1.10 Доказать равенства:

$$r_m(r_m(a) + r_m(b)) = r_m(a + b); \; r_m(r_m(a) \cdot r_m(b)) = r_m(a \cdot b).$$

1.2 Простые числа, основная теорема арифметики

Задача 2.1 Может ли число $n!$ оканчиваться ровно на 5 нулей?

Задача 2.2 На сколько нулей оканчивается число 100!

Задача 2.3 Если число n имеет нечетное количество делителей, то оно не может являться квадратом натурального числа.

Задача 2.4 Дано: $56a = 65b$. Доказать, что $a + b$ – составное число.

Задача 2.5 Решить в натуральных числах уравнения:

$a)$ $x^2 - y^2 = 31$; $b) x^2 - y^2 = 303$.

Задача 2.6 Доказать, что число n, большее единицы, делит число $(n-1)! + 1$ тогда и только тогда, когда n – простое.

Задача 2.7 Дано: p и $p^2 + 2$ – простые числа. Доказать, что $p^3 + 2$ – простое число.

Задача 2.8 Дано: $x^2 + y^2 = z^2$. Доказать, что xy делится на 12.