

# 1 Подкольца и идеалы

**Задача 1.1.** Докажите, что подкольца кольца вычетов  $\mathbb{Z}_m$  имеют вид  $d\mathbb{Z}_m$ , где  $d \mid m$ ,  $1 \leq d \leq m$ . Все они являются идеалами.

**Задача 1.2.** (а) Множества верхнетреугольных, диагональных матриц являются подкольцами кольца  $R_{n,n}$  квадратных матриц над кольцом  $R$ . Эти подкольца не являются идеалами.

(б) В кольце многочленов  $R[x]$  над коммутативным кольцом  $R$  множество  $R$  и множество  $R[x^2] = \{G(x^2) : G(x) \in R[x]\}$  всех многочленов, содержащих лишь четные степени переменной  $x$ , образуют подкольца кольца  $R[x]$ , не являющиеся идеалами.

**Задача 1.3.** Докажите, что (а) кольцо  $P_{n,n}$  простое;

(б) коммутативное кольцо  $R \neq 0$  является простым тогда и только тогда, когда оно — поле или кольцо простого порядка с ненулевым умножением;

(в) коммутативное кольцо  $R$  с единицей является простым тогда и только тогда, когда  $R$  — поле.

**Задача 1.4.** Может ли поле содержать собственные подкольца? Рассмотрите известные вам примеры конечных и бесконечных полей. Всегда ли подкольцо поля является полем?

**Задача 1.5.** (а) Если идеал  $I$  содержит обратимый элемент, то  $I = R$ . Таким образом, собственный идеал содержит только необратимые элементы кольца.

(б) Существуют кольца, в которых множество всех необратимых элементов образует идеал. Такие кольца называются *локальными*. Выясните, при каких  $m$  кольцо вычетов  $\mathbb{Z}_m$  локально.

**Задача 1.6.** (а) В кольце  $\mathbb{Z}$  найдите сумму и пересечение идеалов  $2\mathbb{Z}$  и  $3\mathbb{Z}$ ; идеалов  $6\mathbb{Z}$  и  $8\mathbb{Z}$ .

(б) Пусть  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ . Докажите, что  $a_1\mathbb{Z} + \dots + a_k\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$  где  $d = (a_1, \dots, a_k)$  — наибольший общий делитель чисел  $a_1, \dots, a_k$ .

(в) В условиях п. (б) докажите, что  $a_1\mathbb{Z} \cap \dots \cap a_k\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$  где  $m = [a_1, \dots, a_k]$  — наименьшее общее кратное чисел  $a_1, \dots, a_k$ .

**Задача 1.7.** Докажите, что отношение “быть подкольцом” является транзитивным, а отношение “быть идеалом” — нет. (Для доказательства последнего рассмотрите цепочку подколец  $2\mathbb{Z}_4 \subseteq 2\mathbb{Z}_4[x] \subseteq \mathbb{Z}_4[x]$ .)

**Задача 1.8.** Пусть  $a_1, \dots, a_k \in R$ . Докажите следующие утверждения.

(а) Если  $R = \mathbb{Z}$ , то  $(a_1, \dots, a_k)_R = (d)_R$ , где  $d = (a_1, \dots, a_k)$  — наибольший общий делитель чисел  $a_1, \dots, a_k$ .

(б) Если  $R = \mathbb{Z}_m$ , то  $(a_1, \dots, a_k)_R = (d)_R$ , где  $d = (a_1, \dots, a_k, m)$ .

**Задача 1.9.** Докажите, что пересечение любого множества подколец кольца  $R$  является подкольцом. Верно ли, что сумма двух подколец является подкольцом?

**Задача 1.10.** Докажите, что если  $R$  — произвольное (не обязательно коммутативное) кольцо с единицей, то

$$(S)_R = \{r_1 s_1 r'_1 + \dots + r_k s_k r'_k : s_i \in S, r_i, r'_i \in R, k \in \mathbb{N}\}.$$

**Задача 1.11.** Докажите, что если  $R$  — кольцо с единицей и  $S \subseteq R$ , то  $\langle S \rangle \subseteq (S)_R$ . Приведите пример, показывающий, что обратное включение не всегда верно.

**Задача 1.12.** Докажите аналог задачи 1.8 для кольца многочленов над полем: если  $f_1(x), \dots, f_k(x) \in P[x]$ , то  $(f_1(x), \dots, f_k(x)) = (d(x))$ , где  $d = (f_1(x), \dots, f_k(x))$  — наибольший общий делитель многочленов  $f_1(x), \dots, f_k(x)$ .

**Задача 1.13.** (а) Все кольца вычетов  $\mathbb{Z}_m$  являются кольцами главных идеалов.

(б) В кольце  $P[x, y]$  многочленов от двух переменных над полем  $P$  многочлены с нулевым свободным членом образуют идеал. Этот идеал порожден двумя элементами  $(x, y)$  и не является главным. Таким образом, кольцо  $P[x, y]$  не является кольцом главных идеалов.

(в) В кольце  $\mathbb{Z}_4[x]$  идеал  $(2, x)$ , порожденный множеством  $S = \{2, x\}$ , не является главным. Следовательно, кольцо  $\mathbb{Z}_4[x]$  не является кольцом главных идеалов.

**Задача 1.14.** (а) В конечном кольце с единицей любой ненулевой элемент либо является делителем нуля, либо обратим.

(б) Конечное коммутативное кольцо с единицей является полем тогда и только тогда, когда в нем нет делителей нуля.

## 2 Факторкольца

**Задача 2.1.** (а) Проверьте, что операции на факторкольце заданы корректно, т. е. их результат не зависит от представителей классов.

(б) Выполните проверку аксиом кольца в факторкольце  $(R/I, +, \cdot)$ .

(в) Докажите, что если кольцо  $R$  коммутативно (содержит единицу  $e$ ), то факторкольцо  $R/I$  по любому идеалу  $I$  также коммутативно (содержит единицу  $[e]_I$ ).

(г) Опишите факторкольца кольца  $R$  по несобственным идеалам  $0$  и  $R$ .

**Задача 2.2.** (а) Выпишите таблицы сложения и умножения в поле  $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2 + x + e)$ .

(б) Постройте поля из 8, 9 и 16 элементов.

**Задача 2.3.** Пользуясь равенством  $??$ , перечислите элементы поля  $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ . Выясните, как складываются и умножаются элементы в этом поле. Установите изоморфизм между полем  $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$  и полем комплексных чисел  $\mathbb{C}$ .

**Задача 2.4.** Пусть многочлен  $f(x)$  над полем  $P$  имеет каноническое разложение  $f(x) = f_1(x)^{k_1} \dots f_s(x)^{k_s}$ . Опишите все делители нуля и все нильпотентные элементы кольца  $P[x]/f(x)$ . (Элемент  $a$  кольца  $R$  называется *нильпотентным*, если  $a^n = 0$  при некотором  $n \in \mathbb{N}$ .)

### 3 Гомоморфизмы колец

**Задача 3.1.** Пусть  $\phi: R \rightarrow S$  — гомоморфизм колец,  $a \in R$ .

(а) Докажите, что гомоморфный образ  $\phi(R)$  кольца  $R$  является подкольцом в  $S$ .

(б) Если  $R$  — коммутативное кольцо (кольцо с единицей  $e$ ), то  $\phi(R)$  — коммутативное кольцо (кольцо с единицей  $\phi(e)$ ).

(в) Верно ли, что если элемент  $a$  обратим, то элемент  $\phi(a)$  обратим? Верно ли обратное утверждение?

(г) Верно ли, что если элемент  $a$  является делителем нуля, то элемент  $\phi(a)$  является делителем нуля? Верно ли обратное утверждение?

**Задача 3.2.** Приведите пример мономорфизма  $\phi: R \rightarrow R[x]$  и эпиморфизма  $\phi: R[x] \rightarrow R$ . Найдите ядра этих гомоморфизмов. Можно ли привести пример эпиморфизма  $\kappa: R[x] \rightarrow R$ , отличного от  $\psi$ ?

**Задача 3.3.** (а) Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $d \mid m$ ,  $1 \leq d \leq m$ . Докажите, что  $\mathbb{Z}_m/d\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_d$ .

(б) Пусть  $P$  — поле,  $f(x), g(x) \in P[x]$ ,  $g(x) \mid f(x)$ , и  $R = P[x]/f(x)$  — кольцо вычетов по многочлену  $f(x)$ . Докажите, что  $I = ([g(x)]_{f(x)})_R = [g(x)]_{f(x)}R$  — идеал кольца  $R$ , и что  $R/I \cong P[x]/g(x)$ .

**Задача 3.4.** Сформулируйте и докажите кольцевые аналоги теоремы об образах и прообразах, теоремы о соответствии, 1 и 2 теорем об изоморфизме для групп и их следствия (одна теорема и ее следствия на выбор).

### 4 Разложение колец вычетов

**Задача 4.1.** (а) Доказать, что кольцо  $\mathbb{Z}$  неразложимо.

(б) Доказать, что кольцо  $\mathbb{Z}_{p^k}$ , где  $p$  — простое число,  $k \in \mathbb{N}$ , неразложимо.

**Задача 4.2.** (а) Пусть  $R = I_1 \dot{+} \dots \dot{+} I_t$  — разложение кольца  $R$  в прямую сумму идеалов. Доказать, что если  $R$  — кольцо с единицей  $e$ , то  $I_1, \dots, I_t$  — кольца с единицами  $e_1, \dots, e_t$ , причем  $e_1 + \dots + e_t = e$ .

(б) Опишите явно элементы  $e_1, \dots, e_t$  в случае, когда  $R = \mathbb{Z}_m$ , где  $m = p_1^{k_1} \dots p_t^{k_t}$ .

**Задача 4.3.** Найдите компоненты элементов  $50, 51 \in \mathbb{Z}_{120}$ .

**Задача 4.4.** Если  $R = R_1 \oplus \dots \oplus R_t$ , то для любого  $s \in \overline{1, t}$  в кольце  $R$  существует идеал, являющийся кольцом, изоморфным кольцу  $R_s$ . Приведите примеры, когда такой идеал определен однозначно и неоднозначно.

**Задача 4.5.** (а) Построить в явном виде изоморфизм  $\psi: \mathbb{Z}/m_1 \oplus \mathbb{Z}/m_2 \rightarrow \mathbb{Z}/m$  обратный к изоморфизму  $\phi: \mathbb{Z}/m \rightarrow \mathbb{Z}/m_1 \oplus \mathbb{Z}/m_2$ ,  $\phi([a]_m) = ([a]_{m_1}, [a]_{m_2})$ .

(б) Построить в явном виде изоморфизм  $\phi: \mathbb{Z}/m \rightarrow \mathbb{Z}/p_1^{k_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/p_t^{k_t}$  и обратный к нему изоморфизм  $\psi$ .

**Задача 4.6.** (а) Докажите для любого  $m \in \mathbb{N}$  существует кольцо, состоящее из  $m$  элементов.

(б) Приведите примеры неизоморфных колец, состоящих из  $m = 4, 8, 12$  элементов (по крайней мере по три неизоморфных кольца для каждого  $m$ ).